MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

1. El Modelo AK

El comportamiento de los hogares

Nota: voy a denotar las variables cambiantes en el tiempo de esta forma: x_t*, en lugar de* $x(t)$ *como correspondería a un modelo en tiempo continuo.*

Problema del hogar:

$$\underset{\{c_t\}}{Max} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) dt \qquad \rho > 0,\ \theta > 0$$

sujeto a: $\dot{a}_t = (r_t - n) a_t - c_t$ (1)

dado a_0

Solución de este problema:

$$H = e^{-\rho t}\left[\left(\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)+\lambda_t\left((r_t-n)a_t-c_t\right)\right]$$

Sea $\mu_t \equiv \lambda_t e^{-\rho t} \Rightarrow \dot{\mu}_t = e^{-\rho t}\left(\dot{\lambda}_t - \rho\lambda_t\right)$.

CPO:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \to c_t^{-\theta} = \lambda_t \Rightarrow -\theta\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial a_t} = \dot{\mu}_t = e^{-\rho t}\left(\dot{\lambda}_t - \rho\lambda_t\right) \to$$

$$-e^{-\rho t}\lambda_t(r_t-n) = e^{-\rho t}\left(\dot{\lambda}_t - \rho\lambda_t\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = r_t - (\rho+n). \qquad (3)$$

$$\lim_{t\to\infty} a_t\, e^{-\rho t}\lambda_t = 0. \qquad (4)$$

Por tanto, las condiciones de optimalidad son:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[r_t - (n+\rho)\right]. \qquad (5)$$

$$\dot{a}_t = (r_t-n)a_t - c_t \qquad (6)$$

junto con (4).

El comportamiento de las empresas

$$\underset{k_t}{Max} \quad f(k_t) - (r+\delta)k_t$$

$$\text{sujeto a:} \quad f(k_t) = Ak_t \tag{7}$$

CPO:

$$r_t = A - \delta \Rightarrow r = A - \delta, \ \forall t \tag{8}$$

El equilibrio

Dado que esta economía es cerrada, en equilibrio debe ocurrir que $a_t = k_t$.

Def. *Un equilibrio consiste en unas asignaciones* $\{c_t, a_t, k_t\}$ *y unos precios* $\{r_t\}$ *tales que:*

a) $\{c_t, a_t\}$ *resuelven el problema del hogar, dado* $\{r_t\}$ *;*

b) $\{k_t\}$ *resuelve el problema de la empresa dado* $\{r_t\}$ *;*

c) Los mercados se vacían$\Rightarrow k_t = a_t$*, es decir*

$$\underbrace{c_t}_{\text{Consumo}} + \underbrace{\dot{k}_t - (n+\delta)k_t}_{\text{Inversión}} = \underbrace{Ak_t}_{\text{Producto}}$$

En definitiva, las condiciones de optimalidad del problema son (sustituyendo (8) y $k_t = a_t$ en (4)-(6)) :

$$c_t + \dot{k}_t - (n+\delta)k_t = Ak_t \qquad (9)$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}\left[A - (\delta + \rho + n)\right] \qquad (10)$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t \; e^{-(A-\delta-n)t} = 0, \qquad (11)$$

ya que de (3) $\dot{\lambda}_t = -\left[A - (\delta + \rho + n)\right]\lambda_t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_t = e^{-[A-(\delta+\rho+n)]t}\lambda_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} k_t \; e^{-\rho t} e^{-[A-(\delta+\rho+n)]t}\lambda_0 = \lim_{t\to\infty} k_t \; e^{-(A-\delta-n)t} = 0.$$

Es fácil ver de (10) que es una ecuación diferencial en la variable c_t, con parámetros constantes, cuya solución es:

$$c_t = c(0)\; e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho-n)t} \qquad (12)$$

Supondremos que el crecimiento del consumo es positivo, es decir, $A > \delta + \rho + n$. Además supondremos que la *suma* de utilidades descontada está limitada o acotada, es decir, el consumo no puede crecer más rápido que el descuento:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt<\infty \Rightarrow \int_0^\infty e^{-\rho t}(c_t^{1-\theta}-1)dt<\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\rho t}c_t^{1-\theta}dt-\underbrace{\int_0^\infty e^{-\rho t}dt}_{0<\rho^{-1}<\infty}<\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\rho t}c_t^{1-\theta}dt<\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\left[\rho-\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho-n)\right]t}c_0^{1-\theta}dt<\infty$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{c_0\in(0,\infty)} \int_0^\infty e^{-\left[\rho-\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho-n)\right]t}dt<\infty$$

$$\Rightarrow \rho-\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-n-\rho)>0$$

esto es, la “condición de utilidad acotada o limitada”.

En definitiva, existe solución con crecimiento del consumo positivo si

$$A>\rho+\delta+n>\frac{1-\theta}{\theta}(A-\delta-\rho-n)+n+\delta.$$

Dinámica de transición

Ahora demostramos que el modelo carece de dinámica de transición, y calculamos el valor óptimo del consumo inicial. Con esto tendremos resuelto analíticamente el problema:
Sustituyendo (12) en (9) tenemos:

$$\dot{k}_t = (A-\delta-n)k_t - c_0\, e^{\gamma_c t}, \text{ donde } \gamma_c = \frac{1}{\theta}(A-\delta-\rho-n)$$

La solución a esta ecuación es (ver apéndice 1):

$$k_t = \left[k_0 - \frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c} \right] e^{(A-\delta-n)t} + \frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c} e^{\gamma_c t},$$

donde $(A-\delta-n)-\gamma_c > 0$ por la condición de "utilidad acotada o limitada".

Si sustituimos esta expresión en la condición de transversalidad (11) tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\left[k_0-\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\right]+\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}e^{[\gamma_c-(A-\delta-n)]t}\right\}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left[k_0-\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\right]+\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\underbrace{\lim_{t\to\infty}e^{[\gamma_c-(A-\delta-n)]t}}_{=0 \text{ porque } \gamma_c-(A-\delta-n)<0}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left[k_0-\frac{c_0}{(A-\delta-n)-\gamma_c}\right]=0$$

Para que se satisfaga esta expresión, tiene que cumplirse que el consumo inicial óptimo sea:

$$c_0=\left[(A-\delta-n)-\gamma_c\right]k_0 \qquad (13)$$

Por tanto, la solución al problema es:

Dado k_0 y $\gamma_c=\frac{1}{\theta}(A-\delta-n-\rho)$:

$k_t=k_0\, e^{[\gamma_c]t}$,

$c_t=\left[(A-\delta-n)-\gamma_c\right]k_t=\left[(A-\delta-n)-\gamma_c\right]k_0e^{[\gamma_c]t}$,

$y_t=Ak_0\, e^{[\gamma_c]t}$,

$$s=\frac{\dot{k}_t+(n+\delta)k_t}{y_t}=\frac{\gamma_c+(n+\delta)}{A}$$

Todas las variables que crecen lo hacen a la misma tasa constante.

El problema del planificador

$$\underset{\{c_t\}}{Max} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) dt$$

sujeto a: $\dot{k}_t = Ak_t - (\delta + n)k_t - c_t$

dado k_0

Puede demostrarse que las condiciones de optimalidad son:

$$c_t + \dot{k}_t - (n + \delta)k_t = Ak_t \qquad (14)$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\theta}(A - \delta - n - \rho) \qquad (15)$$

$$\lim_{t \to \infty} k_t \, e^{-(A-\delta-n)t} = 0. \qquad (16)$$

Estas condiciones son las mismas que obteníamos en el equilibrio competitivo. Por tanto, podemos decir que el equilibrio competitivo es óptimo y que podemos encontrar unos precios (unos tipos de interés y un precio sombra o variable de coestad0) tales que la solución del planificador coincida con el equilibrio competitivo. En definitiva, se satisfacen los dos teoremas del bienestar.

Apéndice 1

*Solución de la ecuación homogénea $\left[\dot{k}_t = (A-\delta-n)k_t\right]$:

$k_t = B\, e^{(A-\delta-n)t}$, donde B es una constante arbitraria.

*Una solución particular: $k_t = D\, e^{\gamma_c t} \Rightarrow \dot{k}_t = \gamma_c D\, e^{\gamma_c t}$:

Sustituyendo esta solución particular en $\dot{k}_t = (A-\delta-n)k_t$ - $c_0 e^{\gamma_c t}$

se tiene que $D = \dfrac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c}$.

Nótese que, por la condición de utilidad limitada: $A-\delta-n-\gamma_c > 0$.

*Solución general (sumando la solución a la ec. homogénea y la solución particular):

$$k_t = B\, e^{(A-\delta-n)t} + \frac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c} e^{\gamma_c t}.$$

*Solución completa: teniendo en cuenta que $k(0) = k_0$, dado:

entonces $B = k_0 - \dfrac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c}$.

Por tanto, la solución es:

$$k_t = \left[k_0 - \frac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c}\right] e^{(A-\delta-n)t} + \frac{c_0}{A-\delta-n-\gamma_c} e^{\gamma_c t}$$